ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Анастасии Юрьевны Дуплищевой "Спектральный анализ разностных операторов", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена кругу вопросов (односторонняя обратимость, замкнутость образа, фредгольмовость и т.п.), связанных с обратимостью разностного оператора

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) \tag{1}$$

в пространствах последовательностей $l_p(\mathbb{Z})$. Предполагается, что последовательность $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, принимает значения в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, а коэффициенты $B_1(n)$ и $B_2(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются линейными ограниченными операторами в $\mathfrak{X}$ и образуют ограниченные последовательности.

Разностные уравнения и операторы, описывают процессы, происходящие в дискретном времени. Дискретная модель для времени возникает, например, в задачах цифровой обработки сигналов и при описании экономических явлений (квартальные и т. п. отчеты). Таким образом, сфера непосредственного применения разностных уравнений и операторов является весьма широкой. Кроме того, исследование уравнений в непрерывном времени часто проводится путем приближения таких уравнений разностными, что представляет собой еще один источник разностных уравнений. Таким образом, тематика, связанная с исследованием разностных уравнений и операторов, **является актуальной**. Обратимость и обращение операторов являются разновидностями задач о существовании и нахождении решений соответствующих уравнений, а обратимость в пространствах l_p тесно связана с дихотомией решений и устойчивостью. Эти задачи являются одними из основных в прикладной теории уравнений.

Диссертация изложена на 99 страницах, состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

В первой главе (занимающей 7 страниц) излагаются некоторые предварительные сведения из спектральной теории. Поскольку она не содержит оригинальных результатов, обсуждать ее я не буду.

Основная идея **второй главы** состоит в переходе от оператора (1) к оператору первого порядка

$$(\mathbb{D}z)(n) = z(n+1) + U(n)z(n), \tag{2}$$

где

$$U(n) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix}.$$

Этот прием широко известен, но, как ни странно, не является досконально изученным (подобным образом, кстати, обстоит дело с вопросами, связанными с комплексификацией и декомплексификацией). В этой главе установлен изоморфизм ядер операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$, эквивалентность замкнутости образов для операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$, равенство коразмерностей образов, эквивалентность обратимости и т. д. Эти результаты **являются новыми**. Особо отмечу **новое наблюдение** (§ 2.4), на котором построены доказательства. Оно заключается в том, что все рассуждения проходят, если в представлении

$$\mathcal{D} = S^2 + \widetilde{B}_1 S + \widetilde{B}_2, \tag{3}$$

где S — оператор сдвига, а $\widetilde{B}_i$ — операторы умножения, оператор S заменить произвольным линейным оператором A. Иными словами, установлено, что связь между так называемыми состояниями обратимости операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ не зависит от коммутационных и иных соотношений между S и $\widetilde{B}_i$, а определяется исключительно тем, что $\mathcal{D}$ является формальным многочленом от S с (левыми) коэффициентами $\widetilde{B}_i$. Похоже, этот прием проходит только для уравнений второго порядка.

В **третьей главе** основной прием второй главы, состоящей в переходе от (3) к абстрактному оператору

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2,$$

переносится на случай неограниченного оператора A. Соответствующие результаты применяются к дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\ddot{x} + B_1(t)\dot{x} + B_2(t)x = f(t).$$

Здесь, пожалуй, основными результатами следует считать теоремы 3.1.2 и 3.3.1, почему-то не включенные в автореферат.

В **четвертой главе** изучается уравнение первого порядка

$$x(t+1) = Bx(t) + f(t) \tag{4}$$

со свободным членом f, принадлежащим пространству C_0 непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Здесь рассматривается случай, когда пространство $\mathfrak{X}$, в котором принимают значения x и f, является конечномерным и, тем самым, B фактически можно считать квадратной матрицей. Подчеркнем, что в (4) время не является дискретным. Казалось бы уравнение (4) распадается на отдельные уравнения на

множествах $t_0 + \mathbb{Z}$, но это не так потому, что решение x ищется в пространстве $C_{b,u}$ ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Тем самым, моменты времени t, не связанные уравнением, оказываются связанными условием непрерывности. Предполагается, что коэффициент B имеет собственные значения на единичной окружности, и тем самым, оператор, соответствующий уравнению (4), не может быть обратимым в традиционных пространствах. Ключевым моментом для основных результатов этой главы является следующий факт. Предположим, что спектр B состоит из одной точки 1; иными словами, B является суммой тождественного оператора и нильпотентного. Предположим, что уравнение (4) имеет решение x, принадлежащее $C_{b,u}$, т.е. являющееся ограниченной и равномерно непрерывной функцией. Тогда x является *1-периодической на бесконечности*, т.е. функция $y(t) = x(t+1) - x(t)$ принадлежит C_0. Основной момент доказательство этого факта приведен на с. 82. Результаты этой главы **являются новыми** уже на уровне постановки задачи.

Содержание диссертационной работы соответствует объявленной теме, а сама диссертация **является законченной научно-исследовательской работой**.

Достоверность и обоснованность научных положений и выводов, приведенных в диссертации, подтверждаются проведенными доказательствами и апробацией посредством докладов на конференциях. Результаты **с необходимой полнотой опубликованы** в научной печати. Автореферат диссертации в целом **полностью и правильно отражает содержание** диссертации. Количество опечаток затрудняет понимание текста незначительно.

В качестве **замечаний** отмечу следующее.

1. В автореферате отсутствует (см. теорему 4.1.1) определение пространства $C_{1,\infty}$ периодических на бесконечности функций. Его необходимо включить в доклад на защите.

2. Из описания оператора $\mathcal{A}$ на с. 62 не ясно, является ли этот оператор замкнутым, а его область определения всюду плотной. Кроме того, в общем случае имеет место лишь включение $(A^2)^* \subseteq (A^*)^2$. Поэтому не очевидно, что оператор $\mathcal{A}^*$ действительно задается формулой, приведенной на с. 63.

3. Не ясно, как определяется умножение в алгебре $C_{\omega,\infty}$ (лемма 4.1.1).

4. На с. 73_2 используется обозначение $\Lambda(b)$ для $b \in L_\infty$. Но как определить $\Lambda(b)$ для $b \in L_\infty$ из текста диссертации не ясно, поскольку группа сдвигов $S(t)$ не является в L_∞ сильно непрерывной.

5. Рассуждения после формулы (4.29), на мой взгляд, нуждаются в более детальном изложении. Например, не вполне ясно, как "из замечания 4.2.1 следует, что $\tilde{g}_{m-1} \in C_0$".

Считаю, что диссертационная работа А.Ю. Дуплищевой "Спектральный анализ разностных операторов" полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, включая п. 9 "Положения ВАК о порядке присуждения ученых степеней", а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук,
преподаватель кафедры математики
Военного учебно-научного центра ВВС
"Военно-воздушная академия им.
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина" И.В. Курбатова

Ирина Витальевна Курбатова
Служ. адрес: 394064, г. Воронеж,
ул. Ст. Большевиков, 54а
e-mail: la_soleil@bk.ru
тел.:+79204014924

Подпись заверяю И.В. Курбатова
Начальник по НИР